ISOMETRIA NO PLANO: UM ENFOQUE TEÓRICO

Jeanne Maria Pereira Costa
Alexandre Pereira Sousa

Editora IFMA

INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Maranhão

Jeanne Maria Pereira Costa
Alexandre Pereira Sousa

Isometria no plano: um enfoque teórico

1ª Edição

São Luís - MA
IFMA
2018

Luís Cláudio de Melo Brito Rocha
Projeto gráfico e Diagramação

Costa, Jeanne Maria Pereira.
C837i Isometria no plano: um enfoque teórico. / Jeanne Maria Pereira Costa; Alexandre Pereira Sousa. _ São Luís: EDIFMA, 2018.

68 p. : il.; Inclui Bibliografia
ISBN: 978-85-69745-40-2

1. Geometria Analítica - ensino. 2. Trigonometria. 3. Isometrias do Plano I. Título.

CDU 514.112

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Michelle S. Pinto - CRB 13/622

Sumário

Introdução

Ao longo do seu desenvolvimento histórico, pode-se dizer que a Geometria assumiu diferentes naturezas. As primeiras considerações geométricas, na Pré História, parecem ter vindo da observação de formas e tamanhos, noções de medidas, necessidades de delimitação de terras, construção de moradias, formas de objetos da natureza.

Com o passar do tempo, apareceram diversas teorias relativas a conceitos geométricos, dessa forma ficou difícil definir o que é geometria. Antigamente, logo com o surgimento da geometria analítica, dizia-se que é o estudo de formas do espaço físico e de suas medidas. Mas em 1872, Félix Klein escreveu um trabalho sobre Teoria dos Grupos, que apresentava a notável definição de "geometria" que serviu para codificar essencialmente todas as geometrias existentes à época e apontou o caminho para novas e frutíferas avenidas da pesquisa geométrica. Hoje é conceituada como a parte da matemática que estuda o espaço e as figuras que podem ocupá-lo.

Algumas questões se colocam hoje a respeito do ensino de geometria. Por que geometria não é quase ensinada no ensino fundamental e médio? Por que o tempo disponível nos currículos não é suficiente para ensinar geometria, só priorizando aritmética e álgebra? Algumas respostas a tais questões podem ser: despreparo do professor para o ensino de geometria; falta de percepção geométrica desde a educação infantil, falta de disciplinas nos cursos de formação de professores que enfoquem aspectos inovadores, não utilização de problemas concretos motivadores para a redescoberta, dentre outras.

Assim sendo, por exemplo, como pode ser feito um estudo proveitoso e prazeroso de trigonometria, onde a redução ao primeiro quadrante, sinais e valores das funções exigem uma percepção geométrica e não uma memorização de fórmulas?

De acordo com os PCN's o trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso ou a utilização de algum software, objetivando assim a visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações, pois a utilização dos mesmos facilitam a aprendizagem do aluno.

Uma das questões a que me proponho, na minha monografia, é utilizar as transformações para desenvolver percepções geométricas como reflexão, rotação, translação, com a finalidade de que os estudantes possam observar figuras e reconhecer movimentos que os identifiquem como idênticos.

Capitulo 1

História da matemática

Ao longo do seu desenvolvimento histórico, pode-se dizer que a matemática assumiu diferentes naturezas.

A matemática primitiva necessitava de um embasamento prático para se desenvolver e esse embasamento veio a surgir com a evolução para formas mais avançadas de sociedade. Foi ao longo de alguns dos grandes rios da África e da Ásia que se deu o aparecimento de novas formas de sociedade: o Nilo na África, o Tigre e o Eufrates na Ásia Ocidental, o Indo e depois o Ganges no sul da Ásia Central e o Howang Ho e depois o Yangtze na Ásia Oriental. Com a drenagem de pântanos, o controle de inundações e a irrigação era possível transformar as terras ao longo desses rios em regiões agricultáveis ricas. Projetos extensivos dessa natureza não só serviram para ligar localidades anteriormente separadas, como também a engenharia, o financiamento e a administração desses projetos, e os propósitos que os motivaram requeriam o desenvolvimento de considerável tecnologia e da matemática concomitante. Assim, pode-se dizer que a matemática primitiva originou-se em certas áreas do Oriente Antigo primordialmente como uma ciência prática para assistir a atividades ligadas à agricultura e à engenharia. Essas atividades requeriam o cálculo de um calendário utilizável, o desenvolvimento de um sistema de pesos e medidas para ser empregado na colheita, armazenamento e distribuição de alimentos, a criação de métodos de agrimensura para a construção de canais e reservatórios e para dividir a terra e a instituição de práticas financeiras e comerciais para o lançamento e a arrecadação de taxas e para propósitos mercantis.

Como vimos, a ênfase inicial da matemática ocorreu na aritmética e na mensuração. Uma arte especial começou a tomar corpo para o cultivo, aplicação e ensino dessa ciência prática. Nesse contexto, todavia, desenvolvem-se tendências no sentido da abstração e, até certo ponto, passou-se então a estudar a ciência por si mesma. Foi dessa maneira que a álgebra evolveu ao fim da aritmética e a geometria teórica originou-se da mensuração.

A geometria babilônica se relaciona intimamente com a mensuração prática. De numerosos exemplos, infere-se que os babilônios do período 2000 a.C. a 1600 a.C. deviam estar familiarizados com as regras gerais da área do retângulo, do triângulo retângulo, do triângulo isósceles, de um trapézio retângulo, do volume de um paralelepípedo reto retângulo e, mais geralmente, do volume de um prisma reto de base trapezoidal.

Foram os gregos os primeiros a privilegiar o raciocínio dedutivo e as primeiras sistematizações da teoria, transformando a geometria em demonstrativa. Esse trabalho tem início com Tales de Mileto (séc. VI a.C.), trazendo os resultados egípcios para a Grécia. Pitágoras (séc. V a.C.) deu continuidade a este trabalho, estendendo o raciocínio dedutivo à álgebra também.

A marca principal da geometria babilônica é seu caráter algébrico. Os problemas mais intricados expressos em terminologia geométrica são essencialmente problemas de álgebra não triviais.

Perto do ano 2000 a.C. a aritmética babilônica já havia evoluído para uma álgebra retórica.

Na idade média os matemáticos europeus não deram maior importância para o desenvolvimento da geometria. No mundo oriental, os matemáticos hindus tinham desenvolvido fortemente a álgebra e a aritmética, mas davam pouco valor à geometria demonstrativa.

Com o fim da idade média, temos o período do renascimento, caracterizado pelo ressurgimento da cultura dos antigos clássicos, os gregos e os romanos, na

Europa. Estudiosos refugiados da cidade de Constantinopla, que caiu sob poderio turco otomano, se fixaram na Itália e com eles trouxeram conhecimentos da geometria grega. Surgiram novas traduções de obras gregas, diretamente para o latim.

A partir do renascimento ao longo de toda idade moderna a geometria volta a ganhar lugar de destaque nos estudos matemáticos. Os matemáticos europeus começam a aperfeiçoar o legado grego e árabe, querer aplicar tais conhecimentos aos problemas de outras ciências em desenvolvimento e a transformar muitas vezes a natureza desta disciplina, de diferentes formas.

O período do final do século XIX foi um período de grandes mudanças em todas as áreas da matemática.

Capitulo 2

Noções básicas

Neste capítulo vamos anunciar teorias que vamos utilizar para o desenvolvimento do próximo capítulo.

2.1 Conjunto

O conceito de conjunto é certamente um dos mais importantes da matemática contemporânea, basicamente esse conhecimento está presente, direta ou indiretamente, em todo ramo da matemática.

Conceito:

Chamamos de conjunto a qualquer coleção de objetos, pessoas, etc, que diz respeito a um agrupamento. Como sinônimo de conjunto, no sentido aqui considerado, poderemos usar sem distinção os termos **classe** e/ou **coleção**. Um conjunto é formado por objetos, de modo genérico chamados de elementos. Costuma-se indicar os conjuntos por letras maiúsculas $A, B, C, ...,$ seus elementos escritos entre chaves e separados por vírgulas.

Exemplo:

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n\},$ indica o conjunto X cujos os elementos são $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n$.

2.1.1 Par ordenado

Conceito primitivo:

Para cada elemento a e cada elemento b, admitiremos a existência de um terceiro elemento (a, b), que denominamos **par ordenado**, de modo que se tenha

$$(a, b) = (c, d) \Rightarrow a = c \text{ e } b = d$$

2.1.2 Produto Cartesiano

Definição 2.1.1. *Dados dois conjuntos A e B, chamamos de Produto Cartesiano ao conjunto formado de pares ordenados (a, b) tal que $a \in A$ e $b \in B$.*

Simbolicamente:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ e } b \in B\}$$

2.1.3 Relação

Definição 2.1.2. *Dados dois conjuntos A e B, chama-se relação binária de A em B todo subconjunto $A \times B$, isto é $R \subset A \times B$.*

Simbolicamente:

$R = \{(a, b) \in A \times B | a \in A \text{ e } b \in B\}$

Propriedades Relativa da Relação Binária:

- reflexiva: se, qualquer que seja $x \in A$, então $(x, x) \in R$.
- simétrica: se, quaisquer que sejam $x, y \in A$, $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$.

- transitiva: se, quaisquer que sejam $x, y, z \in A$, $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$.

2.1.4 Função

Definição 2.1.3. *Dados dois conjuntos A e B, não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de **aplicação** ou **função** definida em A tomando valores em B. Em símbolo, $f : A \to B$ se, e somente se:*

- *Todo elemento do conjunto A participa da relação com um único elemento do conjunto B.*
- *A é chamado de **Conjuno de partida** ou **Domínio da função**, enquanto que B é chamado de **Conjunto de chegada** ou **Contra Domínio**.*
- *Os elementos do conjunto B que participam da relação formam um subconjunto denominado imagem da função f. Ou seja $I_f \subset B$.*

2.1.5 Espaço vetorial

Definição 2.1.4. *Um conjunto $V \neq \emptyset$, é um **Espaço Vetorial** real ou complexo, com a operação de adição e da multiplição por um escalar, isto é:*

- $\forall a, b \in V$ *temos que* $a + b \in V$
- $\forall a \in V$ *e* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *temos que* $\lambda a \in V$

Se são satisfeitos os seguintes axiomas condições:

Axiomas da adição:

A1 *Associativa:* $u + (v + w) = (u + v) + w, \ \forall u, v, w \in V$

A2 *comutativa:* $u + v = v + u, \ \ \forall u, v \in V$

A3 *Elemento Neutro: Existe* $0 \in V$, *tal que* $u + o = o + u, \ \ \forall u \in V$

A4 *Inverso Aditivo:* $\forall u \in V, \ \ \exists -u$ *tal que* $u + (-u) = 0, \ \ u \in V$

Axiomas da multiplicação por escalar:

M1 *Associativa em relação a multiplicação por escalar:*
$\alpha(\beta v) = \beta(\alpha v) = (\alpha\beta)v =, \ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *e* $\forall v \in V$

M2 *Distributiva em relação a adição de vetores:*
$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ *e* $\forall u, v \in V$

M3 *Distributiva em relação a adição de escalares:*
$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v, \ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *e* $\forall v \in V$

M4 *Multiplicação pelo Escalar* 1*:* $1 \cdot v = v \ \ \forall v \in V$

2.2 Subespaço vetorial

Definição 2.2.1. *Seja* V *um espaço vetorial. Um subconjunto* W *não vazio de* V, $W \subset V$, *é um* ***subespaço vetorial*** *de* V, *se* W *é um espaço vetorial e além disso, satisfaz os seguintes itens:*

i $0 \in W$

ii $\forall u, v \in W$ *temos* $u + v \in W$

iii $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, *e* $v \in W$ *temos que* $\lambda \cdot v \in W$

2.2.1 Grupos

Definição 2.2.2 (Operação Binária). *Seja G um conjunto não-vazio. Chamamos de operação binária a uma aplicação do tipo:*

$$* : G \times G \to G$$

Definição 2.2.3 (Grupo). *Um grupo G é m conjunto não-vazio G munido de uma operação binária, denotada por $*$, tal que:*

1. *Para cada par de elementos $f, g \in G$ temos que $f * g \in G$;*

2. *Para quaisquer f, g e h de G temos $(f * g) * h = f * (g * h)$;*

3. *Existe $e \in G$, denominado elemento neutro, tal que para todo $f \in G$, temos que $f * e = e * f = f$;*

4. *Para quaisquer $f \in G$ existe um elemento $g \in G$, denominado inverso de f, tal que $f * g = g * f$*

Lema 2.2.1. *Sejam $f, g \in G$, G um grupo. Então as equações $f * x = g$ e $y * f = g$ em soluções únicas para $x = f^{-1} * g$ e $y = g * f^{-1}$, para todo $f, g \in G$.*

Lema 2.2.2. *Sejam $f, g, h \in G$, G um grupo. Então são válidas as leis de cancelamento:*

$$f * g = f * h \;\Rightarrow\; g = h$$

$$g * f = h * f \;\Rightarrow\; g = h$$

Definição 2.2.4 (Subgrupo). *Seja G um grupo, munido da operação $*$, e H um subconjunto não-vazio de G. H é um subgrupo de G se, com a operação $*$ temos:*

1. *Dados $f, g \in H$ implica que $f * g \in H$*

2. *Para todo* $f, g, h \in H$ *temos* $f * (g * h) = (f * g) * h$

3. *Existe* e_H *tal que* $e_H * h = h * e_H, \ \forall h \in H$

4. *Para cada* $h \in H,$ *existe* $h' \in H$ *tal que* $h * h' = h' * h = e_H$

Teorema 2.2.1. *Sejam* G *um grupo e* H *um subconjunto não-vazio de* G*. Então* H *é um subgrupo de* G *se, e somente se,*

1. *Se* $f, g \in H$ *então* $f * g \in H$*;*

2. *Para todo* $f \in H$ *temos* $f^{-1} \in H$*.*

Teorema 2.2.2. *Sejam* G *um grupo e* H *um subconjunto não-vazio de* G*.* H *é um subgrupo de* G *se, e somente se, para todo* $f, g \in H$ *então* $f * g^{-1} \in H$*.*

Observação:

Simbolicamente, se H é um subgrupo de G escrevemos: $H \leq G$

Definição 2.2.5 (Subgrupo Gerado)**.** *Sejam* X, G *dois conjuntos não vazios,* X *subconjunto de* G*. O subgrupo de* G *gerado por* X*, denotado por* $\langle X \rangle$*, é o subgrupo de* X *que satisfaz:*

1. $\langle X \rangle \leq G$*;*

2. $X \subset \langle X \rangle$*;*

3. *Se* $H \leq G$*, tal que* $X \subseteq H$*, então* $\langle X \rangle \subseteq H$*;*

Observação:
Para o objetivo deste estudo, a operação $*$ usada é a operação de composição de funções,isto é:

$$f * g = f \circ g$$

Definição 2.2.6 (Permutação)**.** *Seja* X *um conjunto não-vazio. Uma permutação é uma aplicação bijetiva* $\phi : X \to X$*.*

Observação:
O conjunto de todas as permutações de X é denotado por S_X. Caso $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, escrevemos $_n$ para representar o conjunto das permutações de X.

Definição 2.2.7 (Conjugado)**.** *Sejam* G *um grupo e* $f, g \in G$*. O elemento* $g^{-1}fg$ *de* G *é chamado de conjugado de* f *por* g*, e o conjunto de todas as conjugações de* f *dado por* $\{g^{-1}fg; g \in G\}$ *é chamado de Classe de conjugação de* f *em* G *ou conjugao de* f *em* G*.*

Definição 2.2.8 (Homomorfismo de Grupos)**.** *Sejam* G_1 *e* G_2 *grupos. Um homomorfismo de* G_1 *em* G_2 *é a aplicação* $\phi : G_1 \to G_2$ *que preserva a operação, ou seja, para todo* $g_1, g_2 \in G_1$, $\phi(g_1 \circ g_2) = \phi(g_1) \circ \phi(g_2)$*.*

Definição 2.2.9 (Isomorfismo de Grupos)**.** *Sejam* G_1 *e* G_2 *grupos. Um homomorfismo de* $\phi : G_1 \to G_2$ *é chamado de isomorfismo se, e somente se,* ϕ *é uma aplicação bijetiva. Neste caso, dizemos que* G_1 *e* G_2 *são isomorfos. Simbolicamnte* $G_1 \cong G_2$*.*

Definição 2.2.10 (Automorfismo de Grupos)**.** *Seja* G_1 *um grupos. Um isomomorfismo de* $\phi : G_1 \to G_2$ *é chamado de automofismo.*

Capitulo 3

Isometria no plano

Neste capítulo apresentaremos notações e conceitos básicos. Vamos definir isometria no plano e desenvolveremos um estudo introdutório deste assunto fascinante. Temos como objetivo definir as isometrias e demonstrar algumas propriedades básicas que norteiam esse assunto.

3.1 Notações Básicas e Notações

Antes de começarmos o estudo de isometria no plano vamos apresentar algumas notações importantes para o desenvolvimento deste estudo, como **Ponto**, **Reta** e **Plano**. Vejamos:

- Ponto: Os pontos efetualmente serão simbolizados pelas letras do cojunto X, Y, Z, W
- Reta: As retas efetualmente serão simbolizadas pelas letras do cojunto K, L, M, N
- Plano: O plano efetualmente serão simbolizados pelas letras do cojunto A, B, C, D

A partir de estabelecer estas notações vamos também indicar a notação usada para reta definida por dois pontos distintos, segmento de reta e plano dado por três pontos distintos.

- A reta que passa pelos pontos distintos X e Y é representada pela seguinte notação: $X + Y$
- O segmento de reta de extremidade nos pontos distintos X e Y é representado pela seguinte notação: $[X + Y]$
- O Plano que passa pelos pontos distintos X, Y e Z é representado pela seguinte notação: $X + Y + Z$

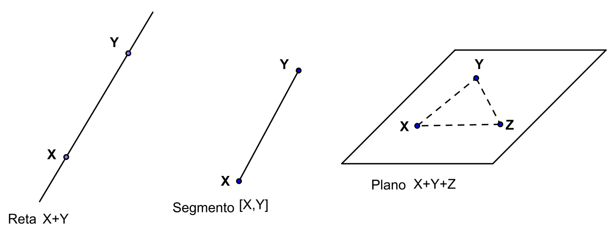

Figura 3.1: Reta-Segmento de Reta-Plano

3.2 Definição

[Isometria]

Uma aplicação $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, é chamada de isometria se para todos pontos X e Y em $\mathbb{R}^2$,

$$|X, Y| = |I(X), I(Y)|$$

ou seja, a isometria é a aplicação que preserva distância.

Teorema 3.2.1. *Toda isometria I aplica três pontos colineares em três pontos colineares e três pontos não colineares em três pontos não colineares.*

Demonstração. Sejam X e Y e Z três pontos alinhados no plano, e I uma isometria. Desta forma, temos:

- $|X, Y| = |I(X), I(Y)|$
- $|X, Z| = |I(X), I(Z)|$
- $|Y, Z| = |I(Y), I(Z)|$

Como X, Y e Z são alinhados, pelo axioma de Archimedes, ou axioma da continuidade,

- $|X, Y| + |Y, Z| = |X, Z|$
- $|X, Z| + |Z, Y| = |X, Y|$
- $|Y, X| + |X, Z| = |Y, Z|$

Como I é uma isometria,

- $|I(X), I(Y)| + |I(Y), I(Z)| = |I(X), I(Z)|$
- $|I(X), I(Z)| + |I(Z), I(Y)| = |I(X), I(Y)|$
- $|I(Y), I(X)| + |I(X), I(Z)| = |I(Y), I(Z)|$

Novamete pelo axioma de archimedes ou axioma da continuidade, $I(X), I(Y)$ e $I(Z)$ são colineares.

O que conclui a demonstração.

$\square$

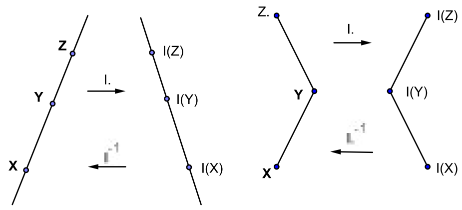

Figura 3.2: Gráfico de pontos colineares e não-colineares

Teorema 3.2.2. *Seja* $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *e* $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *isometrias. A composta de duas isometrias é uma isometria.*

Demonstração. Como $I, J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ isometrias, temos:

- $|I(X), I(Y)| = |X, Y|$
- $|J(X), J(Y)| = |X, Y|$

Queremos mostrar que a composição de duas isometrias é uma isometria, ou seja, $J \circ I$ preserva distância. Então:

$|J \circ I(X, Y)| = |J \circ I(X), J \circ I(Y)| = |J(I(X)), J(I(Y))| =$ como J é uma isometria

$= |J(I(X)), J(I(Y))| = |I(X), I(Y)|$ como I é uma isometria

$= |I(X), I(Y)| = |X, Y|$

Logo $|J \circ I(X, Y)| = |X, Y|$. Portanto $J \circ I$ é uma isometria. O que conclui a demonstração.

$\square$

Teorema 3.2.3. *Seja* $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *uma isometria, então:*

a) I é uma bijeção

b) $I^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é isometria

Demonstração. a) Vamos mostrar que I é bijetiva, o que nos conduz mostrar que I é injetiva sobrejetiva:

(a.1) I é injetiva:

Sejam X e Y dois pontos distintos do $\mathbb{R}^2$. Como I é uma isometria, I preserva distancia, ou seja, $|X, Y| = |I(X), I(Y)| \neq 0$. Logo, $X \neq Y \Rightarrow I(X) \neq I(Y)$.

(a.2) I é sobrejetiva:

Seja $\bar{P} \in \mathbb{R}^2$. Queremos provar que existe $P \in \mathbb{R}^2$ tal que $I(P) = \bar{P}$. Sejam X, Y e Z três pontos não alinhados e $I(X)$, $I(Y)$ e $I(Z)$ suas respectivas imagens. Pelo teorema 1 $I(X)$, $I(Y)$ e $I(Z)$ também são não alinhados. Desta forma uma das retas $I(X)+I(Y)$, $I(Y)+I(Z)$ e $I(X)+I(Z)$ não contém o ponto $\bar{P}$. Supondo que $\bar{P} \notin I(X) + I(Y)$, seja $\bar{P}'$ o ponto simétrico de $\bar{P}$ pela reta $I(X) + I(Y)$. Como I é uma isometria, existem dois pontos P_1 e P_2 simétricos em relação a reta $X + Y$. Temos então que os triângulos formados pelos pontos P_1P_2XY e $\bar{P}_1\bar{P}_2I(X)I(Y)$ são conguentes. Isto é:

$$\Delta XYP_1 \equiv \Delta XYP_2 \equiv \Delta I(X)I(Y)\bar{P} \equiv \Delta I(X)I(Y)\bar{P}'$$

Como I é uma isometria, $|X, P_1| = |I(X), I(P_1)|$ e $|Y, P_1| = |I(Y), I(P_1)|$. Como $\bar{P}$ e $\bar{P}'$ são os únicos pontos com essa distância de $I(X)$ e $I(Y)$, temos que $\bar{P} = I(P_1)$ ou $\bar{P}' = I(P_1)$. Analogamente, em relação a imagem $I(P_2)$ de P_2, pela isometria I, $\bar{P} = I(P_2)$ ou $\bar{P}' = I(P_2)$. Como $\bar{P}$ e $\bar{P}'$ são distintos, suas imagens também o são distintas. Logo $P_1 = I(\bar{P})$ ou $P_2 = I(\bar{P})$. Ou seja, I é sobrejetiva. Portanto por (a.1) e (a.2) I é uma bijetiva.

b) Seja $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma isometria. Como I é uma bijeção, claramente existe I^{-1}. Queremos mostrar que I^{-1} é uma isometria. Vejamos:

$$|X,Y| = |id(X), id(Y)| = |I^{-1} \circ I(X), I^{-1} \circ I(Y)| = |I^{-1}(I(X)), I^{-1}(I(Y))| = |I^{-1}(X), I^{-1}(Y)|$$

Logo, I^{-1} é uma isometria.

□

Teorema 3.2.4. *O conjunto Ψ das isometrias no plano é um grupo em relação à operação de composição.*

Demonstração. Seja Ψ o conjunto das isometrias do plano $\mathbb{R}^2$.

(1) Mostremos que Ψ é fechado para a operação de composição.

Dadas as isometrias I_1 e I_2 e os pontos X e Y, temos então que:

$|X,Y| = |I_1(X), I_1(Y)|$ pois I_1 é uma isometria,
$|I_1(X), I_1(Y)| = |I_2(I_1(X)), I_2(I_1(Y))|$ pois I_2 é uma isometria,
$|I_2(I_1(X)), I_2(I_1(Y))| = |I_2 \circ I_1(X), I_2 \circ I_1(Y)|$.

Portanto, $I_1 \circ I_2$ preserva distâncias.

(2) Como a operação de composição de aplicações é associativa, e as isometrias I_1, I_2 e I_3 são aplicações, temos que $I_1 \circ (I_2 \circ I_3) = (I_1 \circ I_2) \circ I_3$. logo a composição de isometrias em Ψ é associativa.

(3) Mostremos que Ψ tem elemento neutro. Consideremos a aplicação $id : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, temos:

$$|id(X), id(Y)| = |X, Y|$$

Logo, $id(X) = X$ é uma isometria, e ainda, Ψ tem elemento neutro.

(4) Mostremos que para toda isometria I existe I^{-1} isometria em Ψ. De fato, dados os pontos X e Y, sabemos que $I^{-1}(X)$ e $I^{-1}(Y)$ estão em Ψ, I é uma bijeção. Sendo assim:

$|I^{-1}(X), I^{-1}(Y)| = |I(I^{-1}(X)), I(I^{-1}(Y))|$ pois I é uma isometria
$|I(I^{-1}(X)), I(I^{-1}(Y))| = |I \circ I^{-1}(X), I \circ I^{-1}(Y)|$
$|I \circ I^{-1}(X), I \circ I^{-1}(Y)| = |id(X), id(Y)|$
$|id(X), id(Y)| = |X, Y|$
Logo, $|I^{-1}(X), I^{-1}(Y)| = |X, Y|$

Portanto, pelos ítens 1, 2, 3 e 4, Ψ, o conjunto das isometria no plano, é um grupo.

$\square$

Teorema 3.2.5. *Seja $I : R^2 \to R^2$ uma isometria. Se K é uma semi-reta de origem O, então $I(K)$ é uma semi-reta de origem $I(O)$.*

Demonstração. Seja K uma semi-reta de origem O. Como I é uma sometria, $I(O)$ e $I(K)$ são imagens de O e K respectivamente. Se P_1, P_2, ..., P_n, nessa ordem, são pontos de K, pela isometria I, $I(P_1)$, $I(P_2)$, ..., $I(P_n)$, nessa ordem, são pontos de $I(K)$, tais que:

$$|OP_1| = |I(O)I(P_1)|,\ |OP_2| = |I(O)I(P_2)|,\ \cdots\ |OP_n| = |I(O)I(P_n)|$$

Como a isometria preserva a ordem dos pontos, $I(K)$ é uma semi-reta de origem $I(O)$. O que conclui a demonstração:

□

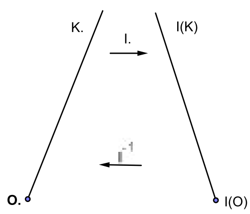

Figura 3.3: Gráfico de pontos colineares e não-colineares

Teorema 3.2.6. *Seja* $I : R^2 \to R^2$ *uma isometria.* I *preserva a ordem de pontos.*

Demonstração. Seja K uma reta e P_1, P_2, e P_3 três pontos de K, nessa ordem. Pela isometria I, $I(K)$, $I(P_1)$, $I(P_2)$, e $I(P_3)$ são imagens de K, P_1, P_2, e P_3 respectivamene. Sendo assim pelo teo.1:

- $|P_1, P_2| + |P_2, P_3| = |P_1, P_3| \xrightarrow{I} |I(P_1), I(P_2)| + |I(P_2), I(P_3)| = |I(P_1), I(P_3)|$
- $|P_1, P_3| + |P_3, P_2| = |P_1, P_2| \xrightarrow{I} |I(P_1), I(P_3)| + |I(P_3), I(P_2)| = |I(P_1), I(P_2)|$
- $|P_2, P_1| + |P_1, P_3| = |P_2, P_3| \xrightarrow{I} |I(P_2), I(P_1)| + |I(P_1), I(P_3)| = |I(P_2), I(P_3)|$

Isto indica que $I(P_1)$, $I(P_2)$, e $I(P_3)$ estão na reta $I(K)$ e além disso, pela isometria I, é mantida a ordem de P_1, P_2, e P_3. O que conclui a demonstração.

□

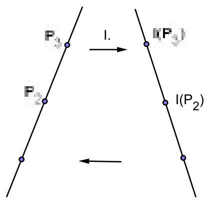

Figura 3.4: Uma isometria conserva a ordem de pontos

Teorema 3.2.7. *Seja* $I : R^2 \to R^2$ *uma isometria. Então:*

(1) I *preserva retas;*

(2) I *Preserva ângulos;*

(3) I *preserva paralalismo entre retas;*

(4) I *preserva perpendicularismo entre retas;*

Demonstração. **(1)** Seja L uma reta e P_1 e P_2 dois pontos distintos de L, ou seja $L = P_1 + P_2$. Consideremos $I(P_1)$ e $I(P_2)$ suas respectivas imagens pela isometria I. Pelo teo.1, a imagem de um ponto $P \in L$, alinhado com P_1 e P_2, é um ponto $I(P)$ alinhado com $I(P_1)$ e $I(P_2)$. Como I é uma isometria I^{-1} também é uma isometria. Desta forma, dado um ponto $I(Q) \in I(L)$, alinhado com $I(P_1)$ e $I(P_2)$, temos que $I^{-1}(I(Q)) = (I^{-1} \circ I)(Q) = id(Q) = Q \in L$ Logo, cada ponto de L corresponde biunivocamente, pela isometria I, a um ponto de $I(L)$. Portanto a imagem de uma reta é uma reta.

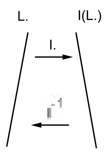

Figura 3.5: Uma isometria preserva retas

(2) Sejam K e L duas semi-retas de origem comum no ponto O, A um ponto de K e B um ponto de L. Como I é uma isometria, $I(K)$, $I(L)$, $I(O)$, $I(A)$ e $I(B)$ de K, L, O, A e B respectivamente e $I(K)$ e $I(L)$ são duas semi-retas de origem $I(O)$, tal que $I(A)$ é um ponto de $I(K)$ e $I(B)$ é um ponto de $I(L)$, tais que:

$$|O, A| = |I(O), I(A)|,\ |OB| = |I(O), I(B)| \ e \ |A, B| = |I(A), I(B)|$$

Desta forma, os triângulos ΔOAB e $\Delta I(O)I(A)I(B)$ são congruentes e portanto $A\hat{O}B \equiv I(A)I(\hat{O})I(B)$.

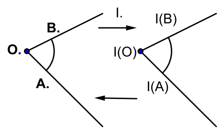

Figura 3.6: Uma isometria preserva ângulos

(3) Sejam K e L duas retas paralelas e $I(K)$ e $I(L)$ suas respectivas imagens. Suponhamos, por absurdo, que $I(K)$ e $I(L)$ não sejam paralelas. Desta forma existe um ponto $I(P)$ comum a $I(K)$ e $I(L)$ cuja a imagem inversa seria o ponto P comum a K e L. Isso é possívl se $K = L$. Ou seja, K e L são retas coincidente. Mas isso implica que $I(K) = I(L)$, o que é um absurdo, pois $I(K)$ e $I(L)$ não são paralelas. Logo, pela isometria I , a imagem de duas retas paralelas são duas retas paralelas.

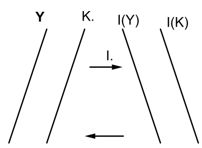

Figura 3.7: Uma isometria preserva paralelismo entre retas

(4) Sejam K e L duas retas perpendiculares, ou seja, K e L são concorrentes num ponto P e o ângulo entre K e L é de $90°$. Consideremos $I(K)$,

$I(L)$ e $I(P)$ imagens de K, L e P, respectivamente. Como I é uma isometria, pelo item (b) deste teorema, I preserva ângulos, então $I(K)$ e $I(L)$ são duas retas perpendiculares.

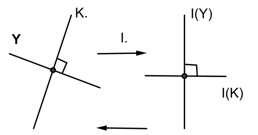

Figura 3.8: Uma isometria preserva Perpendicularismo entre retas

□

Definição 3.2.1 (Ponto Fixo). *Seja* $I : R^2 \to R^2$ *uma isometria e* X *um ponto qualquer.* X *é ponto fixo se* $I(X) = X$.

Teorema 3.2.8. *Seja* $I : R^2 \to R^2$ *uma isometria.* I *fixa ponto a ponto uma reta.*

Demonstração. Dados os pontos X e Y distintos. Como I é uma isometria $|I(X), I(Y)| = |X, Y|$ e I torna fixo os pontos X e Y, isto é: $I(X) = X$ e $I(Y) = Y$. Se W é um ponto da reta $X + Y$, temos que:

- $|I(X), I(Y)| = |X, Y|$
- $|I(X), I(W)| = |X, W|$
- $|I(Y), I(W)| = |Y, W|$

Ou seja,

$$\frac{|I(X), I(Y)|}{|X, Y|} = \frac{|I(X), I(W)|}{|X, W|} = \frac{|I(Y), I(W)|}{|Y, W|} = 1$$

como $I(X) = X$ e $I(Y) = Y$ temos que: $\frac{|X, I(W)|}{|X, W|} = 1$ implicando que $|X, I(W)| = |X, W|$

- $\frac{|X, I(W)|}{|X, W|} = 1 \Rightarrow |X, I(W)| = |X, W|$

- $\frac{|Y,I(W)|}{|Y,W|} = 1 \;\Rightarrow\; |Y, I(W)| = |Y, W|$

Temos assim que $I(W)$ está na reta $X + Y$, no circulo de centro X e raio $|X, W|$ e no circulo de centro Y de raio $|Y, W|$. Logo $I(W)$ está na interseção e esta interseção é o ponto W que pertence a reta $X + Y$. Logo $I(W) = W$, ou seja W é ponto fixo. E portanto, a reta $X + Y$ é fixa ponto a ponto.

□

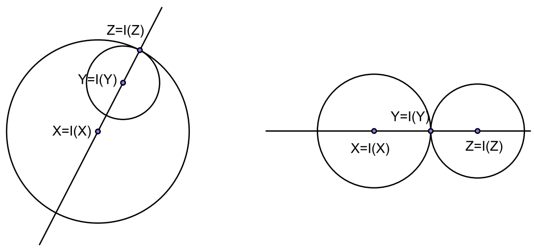

Figura 3.9: Uma reta é fixa ponto a ponto

Teorema 3.2.9. *Seja $I : R^2 \to R^2$ uma isometria arbitrária e L uma reta. Os pontos X e Y estão em semi-planos opostos em relação a L se, e somente se, as imagens $I(X)$ e $I(Y)$ por I, estão semi-planos opostos em relação à reta imagem $I(L)$ de L.*

Demonstração. Consideremos a reta L e os pontos X e Y situados em semi-planos opostos em relação a reta L. Isto ocorre se, e somente se, a reta $X + Y$ intersepta a reta L num ponto W de L. Pelo Teo. 5, isto ocorre se, e somente se, $I(W)$ estiver entre $I(X)$ e $I(Y)$, onde $I(X), I(Y)$ e $I(W)$ são as imagens de X, Y e W respectivamente por I. Como $I(W)$ é a interseção das retas $I(X) + I(Y)$ e $I(L)$ pelo Teo.1, isto ocorre se, e somente se, $I(X)$ e $I(Y)$ estiverem em semi-planos opostos em relação a reta $I(L)$.

□

Visto que uma isometria conserva distância, ângulo e que também conserva paralelismo entre retas, podemos associar essa teoria a:

- Relação de equipolência, símbolo $\approx$, entre vetores: dados dois pares de pontos (X, Y) e (Z, W) distintos, tal que $\vec{XY} \approx \vec{ZW}$ pela isometria I, temos que $I(X), I(Y), I(Z)$ e $I(W)$ são as imagens de X, Y, Z e W respectivamente, são distintas e além disso $I(X)\vec{I}(Y) \approx I(Z)\vec{I}(W)$.

- Relação de congruência entre figuras do Plano. Isto é, se F_1 e F_2 são duas figuras congruentes, quando existe uma isometria I que aplica F_1 sobre F_2 desta forma $F_2 = I(F_1)$.

Observação:

Sendo I uma isometria, X e Y dois pontos distintos, o vetor $\vec{v} = \vec{XY}$ por I tem como imagem o vetor $I(\vec{v}) = I(X)\vec{I}(Y)$.

3.3 Classificação das isometrias

Neste seção temos como objetivo trabalhar isometrias do plano como **translação**, **reflexão**, **rotação** e a **reflexão deslizante** além de mostrar que são isometrias. Primeiramente vamos definir translação no plano, o que indica que vamos precisar de conceitos da algebra linear, como a definição de vetores.

3.3.1 Translação

Definição 3.3.1 (Translação)**.** *Dados os pontos P e P' e um vetor $\vec{v}$ do plano $\mathbb{R}^2$, a expressão $P + \vec{v} = P'$ índica o deslocamento do ponto P na direção do vetor $\vec{v}$ até o ponto P'. Este deslocamento é indicado por $T_{\vec{v}} = P + \vec{v}$.*

Observação:

$P + \vec{v} = P'$ indica a soma de um ponto com um vetor, o que diretamente define

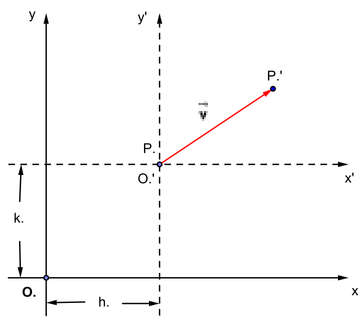

Figura 3.10: Translação de um ponto

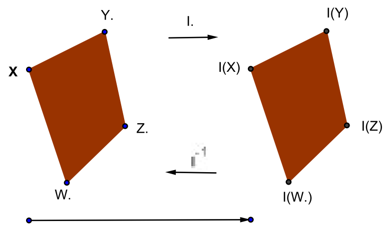

Figura 3.11: Translação de uma figura por um vetor

uma translação.

Propriedades da soma de ponto com vetor:

1. $P+ \vec{0}= P$, onde $\vec{0}$ é um vetor nulo;

2. $(P+ \vec{v})+ \vec{w}= P + (\vec{v} + \vec{w})$;

3. se $P + \vec{v} = P + \vec{w}$ então $\vec{v} = \vec{w}$;

4. se $P + \vec{v} = Q + \vec{v}$ então $P = Q$.

Teorema 3.3.1. *Uma translação na direção de um vetor não nulo* $\vec{v}$*, não tem pontos fixos, isto é, se* $\vec{v} \neq \vec{0}$*, não existe um ponto* P *tal que* $T_{\vec{v}}(P) = P$*.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que exista um ponto P tal que, $P+ \vec{v}= P$. Isto implica que $\vec{v}= P - P =\vec{0}$. o que seria um absurdo, pois por hipótese $\vec{v}\neq\vec{0}$. Logo $T_{\vec{v}}(P) \neq P$. O que conclui a demonstração.

$\square$

Teorema 3.3.2. *Dados dois pontos distintos X e Y do plano, existe uma única translação na direção do vetor $\vec{v}$, $T_{\vec{v}}$, tal que $T_{\vec{v}}(X) = Y$*

Demonstração. Seja $\vec{v} = \vec{XY}$. Desta forma $T_{\vec{v}} = T_{\vec{XY}}$. Isto implica que $T_{\vec{XY}}(X) = Y$. Pela definição de soma de vetores $X + \vec{XY} = Y$ o que indica que $\vec{XY}$ é único tendo origem em X. O que conclui a demonstração.

$\square$

Teorema 3.3.3. *Toda translação é uma isometria.*

Demonstração. Sejam $X, Y \in \mathbb{R}^2$ e $\vec{v} = \vec{XY}$ um vetor deste plano e $T_{\vec{v}}(X) = X'$ e $T_{\vec{v}}(Y) = Y'$, onde X' e Y' são as imagens de X e Y respectivamente pela translação $T_{\vec{v}}$. Queremos mostrar que $|X, Y| = |X', Y'|$. Como estamos transladando os pontos X e Y na direção do mesmo vetor $\vec{v}$, temos que $|X, X'| = |Y, Y'|$ e além disso $\vec{XX'} // \vec{YY'}$. Sendo assim temos que $XX'YY'$ é um paralelogramo, logo tem lados opostos paralelos de mesmo tamanho ou seja $|X, Y| = |X', Y'|$ o que conclui a demontração,

$\square$

Observação:

Sejam X e Y pontos quaisquer do plano onde $X = Y$, e $\vec{v}$ um vetor. Se o ponto X for igual a Y, então teremos que $T_{\vec{v}}(X) = T_{\vec{v}}(Y)$.

3.3.2 Reflexão em relação a um ponto

Definição 3.3.2 (Reflexão em relação a um ponto ou Inversão)**.** *Dado dois pontos $X, Y \in \alpha$, onde α é um plano e X um ponto distinto de Y. Chamamos de reflexão em relação a um ponto Y a transformação que leva o ponto X a um outro ponto X' tal que $|X, Y| = |X', Y|$. Além disso, Y é ponto médio do segmento $[X, X']$, isto é X e X' são simétricos em relação ao ponto Y, onde Y é o centro da reflexão.*

Notação:

Usamos $R_Y(X) = X'$, para indicar que a reflexão de centro Y do ponto X é igual a X'.

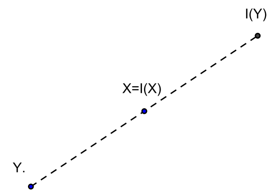

Figura 3.12: Reflexão de centro X ou Inversão de centro X

.

Teorema 3.3.4. *O único ponto fixo de uma reflexão R_M de centro M é seu próprio Centro. As únicas retas que são invariantes pela reflexão R_M são as que passam pelo centro M.*

Demonstração. • A primeira afirmação é conseqüência da definição de reflexão R;

Vejamos que:

- Sejam L uma reta e α um plano. Considerando que L passa pelo ponto M, para todo ponto $X \in L$ temos $R_M(X) = X' \in L$, logo $R(L) \subset L$. Assim, L é invariante pela reflexão R.

□

Teorema 3.3.5. *Dados dois pontos distintos X e Y do plano, existe uma única reflexão R_M em relação a um ponto M tal que $R_M(X) = Y$.*

Demonstração. • Existência:

Sejam X e X' dois pontos distintos, tal que $L = X + X'$ é a reta que passa pelos pontos X e X' e $[X, X']$ é um segmento da reta L. Como X e

X' são distintos existe um ponto $M = \frac{X+X'}{2}$, ponto médio do segmento $[X, X']$. Desta forma existe uma reflexão de centro M tal que $R_M(X) = X'$.

- Unicidade:

Suponhamos por absurdo que existam dois pontos M e N distintos tais que $R_M(X) = X'$ e $R_N(X) = X'$. Desta forma M e N são pontos médios do segmento $[X, X']$, isto é $M = \frac{X+X'}{2} = N$, que é absurdo, pois M e N são distintos. Logo a reflexão R_M é única.

O que conclui a demonstração.

□

Teorema 3.3.6. *Toda reflexão em relação a um ponto é uma isometria.*

Demonstração. Sejam $X, Y \;\; M$ três pontos distintos do plano $\mathbb{R}^2$, dois a dois colineares. Sejam $L_1 = X + M$ e $L_2 = Y + M$ duas retas. Sejam X' e Y' pontos de L_1 e L_2 respectivamente, tal que $M = \frac{X+X'}{2}$ $M = \frac{Y+Y'}{2}$. Queremos mostrar que a reflexão R_M preserva distâncias. Ou seja $|X, Y| = |X', Y'|$. Claramente ΔXYM e $\Delta X'Y'M$ são triângulos. Pelo caso LAL, lado - ângulo - lado, $\Delta XYM \equiv \Delta X'Y'M$ logo $|X, Y| = |X', Y'|$. O que conclui a demonstração.

□

Observação:

Se X e Y são pontos quaisquer do plano $\mathbb{R}^2$, onde $Y = M$. Nestas condições existe uma reta L que passa por M e X, além disso $R_M(Y) = id$ e $|X, Y| = |X', Y'| = |M, X| = |M, P'|$

3.3.3 Reflexão em relação a uma reta

Em geral os exemplos mais importantes de isometrias são as reflexões em retas, pois, toda isometria pode ser representada como um produto finito de reflexões em reta.

Definição 3.3.3. *Seja* L *uma reta do plano* $\mathbb{R}^2$. L *divide* $\mathbb{R}^2$ *em dois semi-planos opostos* α *e* α'. *Se* $X \in \alpha$, *existe um ponto* $X' \in \alpha'$ *tal que* $M = X + X'$ *é uma reta perpendicular a reta* L *no ponto* $W \in L$. *Além disso* W *é ponto médio do segmento* $[X, X']$. *Desta forma dizemos que* $R_L(X) = X'$ *é a reflexão do ponto* X *em relação a reta* L, *e* X' *é a imagem de* X.

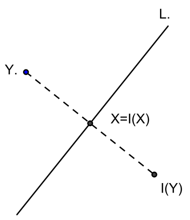

Figura 3.13: Reflexão em relação a uma reta ou Meia-volta

Teorema 3.3.7. *Toda reflexão em relação a uma reta é uma isometria.*

Demonstração. Sejam L uma reta, α e α' dois semi-planos opostos em relação a reta L. Se X e Y são dois pontos distintos de α, os pontos pontos X' e Y' em α' tal que $R_L(X) = X'$ e $R_L(Y) = Y'$. Desta forma existem os pontos W_1 e W_2 em L, pontos médios dos segmentos $[X, X']$ e $[Y, Y']$. Queremos mostrar que $|X, Y| = |X', Y'|$. Vejamos: O triângulo $\Delta WYY'$ é isósceles e base YY', o que indica que os ângulos $\widehat{XW_1Y}$ e $\widehat{X'W_1Y'}$ são congruentes. Desta forma pelo caso LAL, lado-ângulo-lado, os triângulos ΔXYW_1 e $\Delta X'Y'W_1$ são congruêntes. Logo $|X, Y| = |X', Y'|$, o que conclui a demonstração.

$\square$

Teorema 3.3.8. *Seja* L *uma reta e* R_L *a reflexão de eixo* L. *Os únicos pontos fixos de* R_L *são os pontos da reta* L. *Além disso, uma reta qualquer* K *do plano é invariante pela reflexão* R_L, *se e somente se, as retas* L *e* K *são concorrentes ou perpendiculares.*

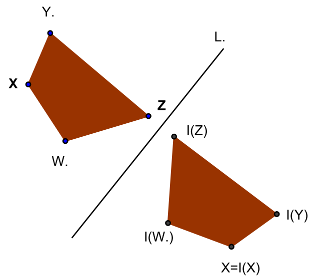

Figura 3.14: Reflexão em relação a uma reta

Demonstração. 1. Sejam L uma reta e R_L uma reflexão de eixo L. Como R_L é uma isometria, temos pelo teorema 3.2.8 que se $X \in L$ então $R_L(X) = X$.

2. Seja K_1 uma reta perpendicular a reta L no ponto $X \in L$ e R_L uma isometria. Desta forma K_1 possui pontos nos semi-planos α e α' definidos pela reta L. Se Y é um ponto de K_1 no semi-plano α, existe o ponto $Y' \in \alpha'$ tal que X é ponto médio do segmento $[Y, Y']$, isto é, a reta L é mediatriz do segmento $[Y, Y']$. Logo, para qualquer ponto $Y \in K_1$ existe $Y' \in K_1$ tal que $|Y, X| = |Y', X|$.

3. Seja K_2 uma reta concorrente a uma reta L no ponto $X \in L$ e R_L uma isometria. Como no item anterior, K_2 possui pontos nos semi-planos α e α' definidos pela reta L. Seja $W \in K_2$ em α e $W' \in K_2$ em α' tal que $X \in L$ é ponto médio de $[W, W']$. Seja X_1 e X_2 projeções ortogonais de W e W' sobre a reta L respectivamente. Dasta forma XWX_1 e $XW'X_2$ são triângulos. Queremos mostrar que $|W, X_1| = |W', X_2|$. Como $W\hat{X}X_1 \equiv W'\hat{X}X_2$ e $X\hat{W}X_1 \equiv X\hat{W'}X_2$ são opostos pelos vértices e correspondentes, temos que $\Delta XWX_1 \equiv \Delta XW'X_2$, pelo caso ângulo-lado-ângulo. Portanto $|W, X_1| = |W', X_2|$. O que conclui a demonstração.

□

3.3.4 Rotação

Antes de definirmos uma rotação no plano, necessitamos de uma orientação para os ângulos do plano. Então adotaremos como ângulos positivos a rotação no sentido anti-horário e os ângulos negativos a rotação no sentido horário.

Definição 3.3.4. *Dados o ponto* $O \in$ *ao plano* $\mathbb{R}^2$ *e um número real* α*, onde* O *e* α *são o centro da rotação e o ângulo da rotação, respectivamente. Definimos rotação como sendo a transformação que fixa o ponto* O *e associa a cada ponto* P *do plano,* $(P \neq O)$ *o ponto* P'*, onde* P *e* P' *pertencem a circunferência formada de centro* O *e raio* OP *e* $P\hat{O}P' = \alpha$*.*

Notação: $R_{O,\alpha}$ Indica uma rotação de centro O e ângulo α

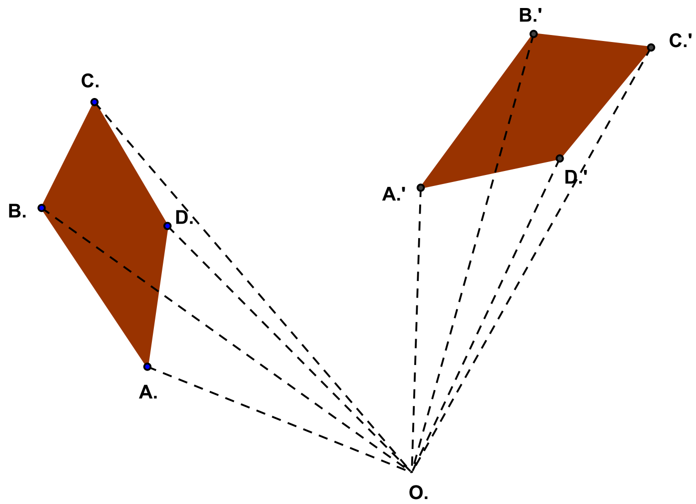

Figura 3.15: Rotação com ângulo de -70°

Observação:

1. $\alpha = \pi$, implica que a rotação coincide com a reflexão em relação ao ponto $O, R_{O,\pi} = R_O$, disto podemos concluir que:

$$R_{O,\alpha+2K\pi} = R_{O,\alpha}, \quad \alpha \in]-\pi, \pi] \;\; e \;\; K \in Z$$

. Podemos também concluir que $R_{O,\alpha}(P) = P'$ se e somente se $R_{O,-\alpha}(P') = P$.

Podemos observar que se $\alpha = \pi$, então a rotação coincide com a reflexão em relação ao ponto $O, R_{O,\pi} = R_O$, disto podemos concluir que:

$R_{O,\alpha+2K\pi} = R_{O,\alpha}$, $\alpha \in \,] - \pi, \pi]$, $K \in Z$

2. $R_{O,\alpha}(P) = P'$ se e somente se $R_{O,-\alpha}(P') = P$.

3. Se os pontos P e P' estão na circunferência de raio OP e os pontos Q Q' estão na circunferência de raio OQ, temos que a distância entre os pontos P e Q ou P' e Q' é a diferença entre os raios das circunferências.

Teorema 3.3.9. *Se $\alpha = 0$ então $R_{O,\alpha} = Id$ e, portanto, $R_{O,\alpha}$ fixa todos os pontos do plano e deixa invariante qualquer reta do plano.*

- *Se $0 < |\alpha| < \pi$ ou $\alpha = \pi$ então o único ponto fixo da rotação $R_{O,\alpha}$ é o seu centro O.*

- *Se $\alpha = \pi$ então as únicas retas do plano invariantes pela rotação $R_{O,\alpha}$ são as que passam pelo centro O.*

- *Se $0 < |\alpha| < \pi$ não existem retas invariantes pela rotação $R_{O,\alpha}$.*

Demonstração. A primeira afirmação é imediata a partir da definição.

- Se $0 < |\alpha| < \pi$ ou $\alpha = \pi$

  Para todo ponto $P \in$ ao plano e distinto de O, temos $R_{O,\alpha}(P) = P'$ com $P \neq O$, onde somente o centro O da rotação é ponto fixo para a rotação $R_{O,\alpha}$.

- Se $\alpha = \pi$

  Já observamos na definição que neste caso $R_{O,\alpha} = R_O$, ou seja, a rotação coincide com a reflexão em relação ao ponto O.

Logo qualquer reta que passa pelo ponto O será invariante quando aplicada $R_{O,\alpha} = R_O$.

- Se $0 < |\alpha| < \pi$

  Tomemos um ponto $O \in r$, reta contida no plano, se aplicarmos uma $R_{O,\alpha}$, teremos uma nova reta r', que também passa por O, pois O é o centro da rotação.

  $R_{O,\alpha}(P) = P'$, onde $P \in r$ e $P' \in r'$

desenho

□

Teorema 3.3.10. *Toda rotação é uma isometria.*

Demonstração. Seja $O \in \alpha, \alpha$ um plano;

Seja $\alpha > 0$ um ângulo, onde $-\pi < \alpha < \pi$;

Com $\alpha > 0$, por definição temos que é a rotação no sentido anti horário;

Dados P,Q pontos quaisquer em α e distintos.

Então para que seja uma isometria provemos que $|P, Q| = |P', Q'|$

Notemos que a distância entre P e Q é a diferença entre os raios OP e OQ criados pela transformação.

A distância entre P' e Q' é a diferença entre os raios OP' e OQ' criados pela transformação.

Como P e $P' \in$ a mesma circunferência e Q e $Q' \in$ a outra circunferência , logo:

$|P, Q| = |P', Q'|$

□

Caso Particular 3.3.1. *Dados P, Q pontos quaisquer em α e distintos, onde $Q = O$;*

$|P, Q| = |P', Q'| = |P, O| = |P', O|$

3.3.5 A Reflexão Deslizante

Definição 3.3.5 (A Reflexão Deslizante)**.** *Uma reflexão deslizante é uma transformação oriunda da composição entre uma reflexão sobre uma reta* L *e uma translação que desloca os pontos segundo a mesma direção da reta* L*. A ordem pela qual se faz as duas transformações não é levada em consideração.*

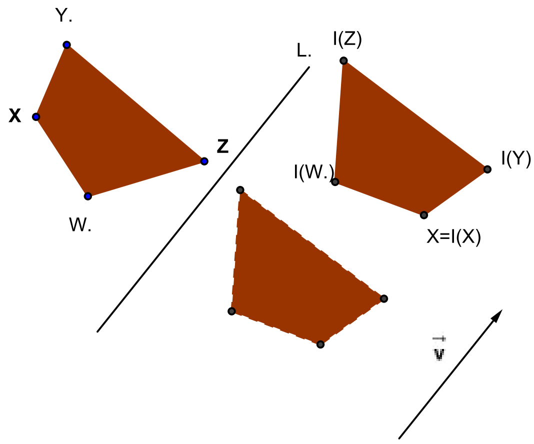

Figura 3.16: A Reflexão Deslizante

Capitulo 4

Isometria e suas aplicações

Agora, já sabemos o que é uma isometria e os movimentos que verificam a sua definição, podemos então analisar uma aplicação de cada uma destas noções.

4.1 Exemplos de aplicação das isometrias no plano

Simetrias no triângulo eqüilátero

A seguir, descrevemos essas simetrias e seus produtos:

Seja XYZ um triângulo equilátero. Sejam M_1, M_2 e M_3 pontos médios dos lados $[Y, Z]$, $[X, Z]$ e $[X, Y]$, respectivamente. Sejam as reflexões cujos os eixos são as medianas $m_1 = X + M_1$, $m_2 = Y + M_2$ e $m_3 = Z + M_3$, respectivamente, e, seja o ponto G a interseção dessas medianas.

A reflexão do eixo $X+M_1$ fixa o vértice X e envia o vértice Y para o vértice Z e vice-versa, como também o triângulo XYM_1 para o triângulo XZM_1 e vice-versa. Ou seja, o triângulo equilátero XYZ é invariante por essa reflexão. Fazendo raciocínio análogo aos eixos $Y+M_2$ e $Z+M_3$ concluímos que o triângulo tem apenas três simetrias de reflexão. Essas reflexões podem ser expressas sob a forma de permutação. Isto é:

[4] Isometria e suas aplicações

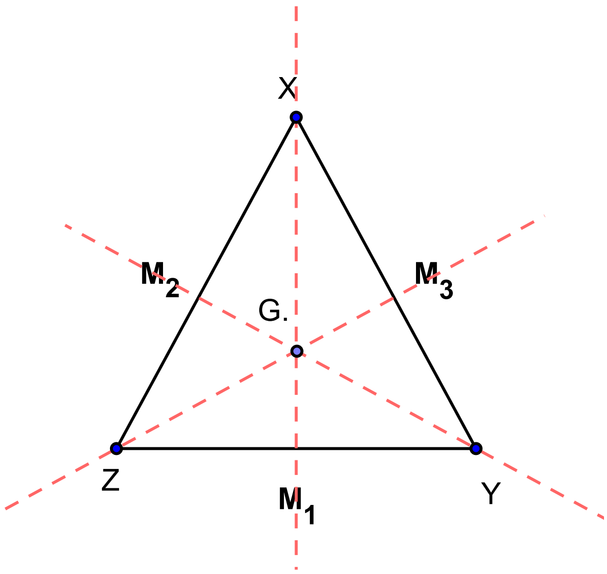

Figura 4.1: Simetrias do triângulo eqüilátero

$$m_1 = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ X & Z & Y \end{pmatrix}, \quad m_2 = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Z & Y & X \end{pmatrix} \text{ e } m_3 = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Y & X & Z \end{pmatrix}.$$

Consideremos agora a rotação ρ de 120^o, no sentido anti-horário, em torno do eixo perpendicular ao triângulo XYZ no ponto G. A rotação ρ envia o vértice X para o vértice Y, o vértice Y para o vértice Z e o vértice Z para o vértice X. Seja $\rho_1 = \rho\rho$, a rotação que envia X para Z, Y para X e Z para Y. Note ainda, que a rotação $\rho_2 = \rho\rho\rho$ de 360^o equivale a identidade I. Essas rotações podem ser expressas sob a forma de permutação. Isto é:

$$\rho = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Y & Z & X \end{pmatrix}, \quad \rho^2 = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Z & X & Y \end{pmatrix} \text{ e } I = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ X & Y & Z \end{pmatrix}.$$

Efetuando a composição entre as reflexões e rotações temos que:

$$m_1 m_1 = m_1(m_1) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ X & Y & Z \end{pmatrix} = I, \quad m_1 m_2 = m_2(m_1) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Z & X & Y \end{pmatrix} = \rho^2$$

$$m_1m_3 = m_3(m_1) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Y & Z & X \end{pmatrix} = \rho, \quad m_2m_1 = m_1(m_2) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Y & Z & X \end{pmatrix} = \rho$$

$$m_2m_2 = m_2(m_2) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ X & Y & Z \end{pmatrix} = I, \quad m_2m_3 = m_3(m_2) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Z & X & Y \end{pmatrix} = \rho^2$$

$$m_3m_1 = m_1(m_3) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Z & X & Y \end{pmatrix} = \rho^2, \quad m_3m_2 = m_2(m_3) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Y & Z & X \end{pmatrix} = \rho$$

$$m_3m_3 = m_3(m_3) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ X & Y & Z \end{pmatrix} = I, \quad m_1\rho = \rho(m_1) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Y & X & Z \end{pmatrix} = m_3$$

$$m_1\rho^2 = \rho^2(m_1) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Z & Y & X \end{pmatrix} = m_3, \quad m_1I = \rho^3(m_1) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ X & Z & Y \end{pmatrix} = m_1$$

$$m_2\rho = \rho(m_2) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ X & Z & Y \end{pmatrix} = m_1, \quad m_2\rho^2 = \rho^2(m_2) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Y & X & Z \end{pmatrix} = m_3$$

$$m_2\rho^3 = I(m_2) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Z & Y & X \end{pmatrix} = m_2, \quad m_3\rho = \rho(m_3) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Z & Y & X \end{pmatrix} = m_2$$

$$m_3\rho^2 = \rho^2(m_3) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ X & Z & Y \end{pmatrix} = m_1, \quad m_3\rho^3 = \rho^3(m_3) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Y & X & Z \end{pmatrix} = m_3$$

$$\rho m_1 = m_1(\rho) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Z & Y & X \end{pmatrix} = m_2, \quad \rho m_2 = m_2(\rho) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Y & X & Z \end{pmatrix} = m_3$$

$$\rho m_3 = m_3(\rho) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ X & Z & Y \end{pmatrix} = m_1, \quad \rho^2 m_1 = m_1(\rho^2) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Y & X & Z \end{pmatrix} = m_3$$

$$\rho^2 m_2 = m_2(\rho^2) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ X & Z & Y \end{pmatrix} = m_1, \quad \rho^2 m_3 = m_3(\rho^2) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Z & Y & X \end{pmatrix} = m_2$$

$$\rho^3 m_1 = m_1(\rho^3) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ X & Z & Y \end{pmatrix} = m_1, \quad \rho^3 m_2 = m_2(\rho^3) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Z & Y & X \end{pmatrix} = m_2$$

$$\rho^3 m_3 = m_3(\rho^3) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Y & X & Z \end{pmatrix} = m_3, \qquad \rho\rho = \rho(\rho) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Z & X & Y \end{pmatrix} = \rho^2$$

$$\rho\rho^2 = \rho^2(\rho) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ X & Y & Z \end{pmatrix} = \rho^3, \qquad \rho\rho^3 = \rho^3(\rho) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Y & Z & Y \end{pmatrix} = \rho$$

$$\rho^2\rho = \rho(\rho^2) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ X & Y & Z \end{pmatrix} = \rho^3, \qquad \rho^2\rho^2 = \rho^2(\rho^2) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Y & Z & X \end{pmatrix} = \rho$$

$$\rho^2\rho^3 = \rho^3(\rho^2) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Z & X & Y \end{pmatrix} = \rho^2, \qquad \rho^3\rho = \rho(\rho^3) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Y & Z & X \end{pmatrix} = \rho$$

$$I\rho^2 = \rho^2(\rho^3) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Z & X & Y \end{pmatrix} = \rho^2, \qquad I\rho^3 = \rho^3(\rho^3) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ X & Y & Z \end{pmatrix} = I$$

Os resultados desta composições podem ser vistos na tabela abaixo.

Concluímos que o grupo de simetria do triângulo eqüilátero é o grupo diedral

$$D_3 = \left\{I, \rho, \rho^2, m_1, m_2, m_3\right\},$$

de ordem $\#D_3 = 2 \cdot 3 = 6$.

$\circ$	I	ρ	ρ^2	m_1	m_2	m_3
I	I	ρ	ρ^2	m_1	m_2	m_3
ρ	ρ	ρ^2	I	m_2	m_3	m_1
ρ^2	ρ^2	I	ρ	m_3	m_1	m_2
m_1	m_1	m_3	m_2	I	ρ^2	ρ
m_2	m_2	m_2	m_3	ρ	I	ρ^2
m_3	m_3	m_2	m_1	ρ^2	ρ	I

Tabela 4.1: Composição de simetrias de um triângulo equilátero

4.1.1 Construção de Padrão de Faixas

Outra aplicação das isometrias no plano é relativo a construção de padrões de faixas a partir de um motivo. sabemos que existem sete tipos de faixas. vejamos:

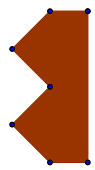

Figura 4.2: Motivo

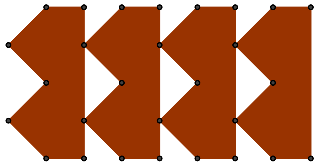

Figura 4.3: Grupo de Simetria t

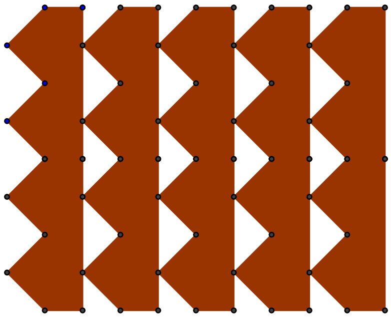

Figura 4.4: Grupo de Simetria th

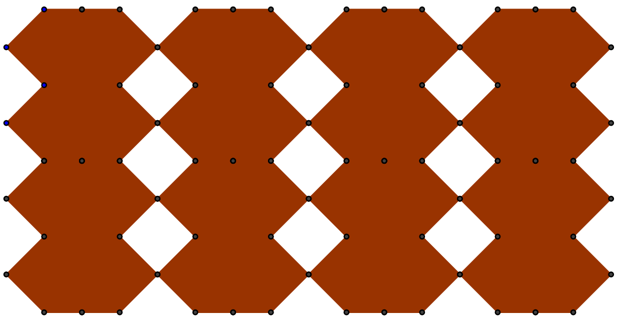

Figura 4.5: Grupo de Simetria trh

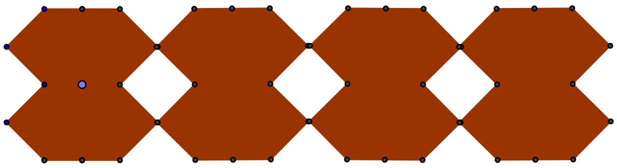

Figura 4.6: Grupo de Simetria tr

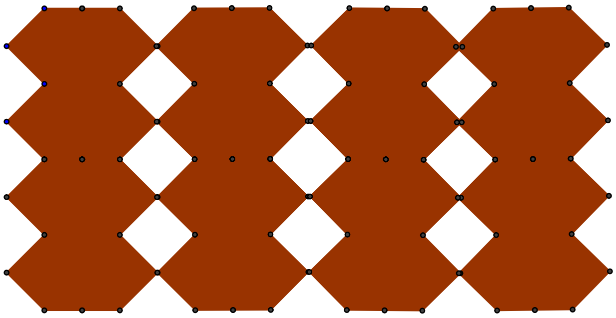

Figura 4.7: Grupo de Simetria trg

Exemplo

Um índio que mora na casa A quer buscar água no rio r e levá-la ao índio que mora na casa B, do mesmo lado do rio. Em que ponto X do rio o índio tem que apanhar a água, para que o seu caminho $(AX) + (XB)$ tenha comprimento menor possível?

Solução:

Representamos o rio por uma reta r. É claro que o índio anda em segmentos de retas. Seja A' a reflexão de A em relação à reta r (rio). Temos:

$(AX) + (XB) = (A'X) + (XB)$.

Essa soma será mínima, quando X estiver no segmento $\overline{AB}$.

Capitulo 5

Considerações Finais

Como vimos, o conceito de transormação geométrica surgiu primeiramente considerando os movimentos de corpos rígidos. Uma das características mais importantes, sob o ponto de vista geométrico, é que nesse movimento o corpo não muda nem de tamanho, nem de forma. Se compararmos a posição inicial e a posição final do corpo, podemos fazer uma correspondência entre os pontos do corpo antes e depois do movimento.

Nas aplicações aqui apresentadas podemos ver que a geometria não se interessa pelo percurso e nem pela velocidade da passagem de um ponto a outro, mas unicamente pela correspondência entre os pontos antes e depois do movimento. Do ponto de vista geométrico, estas aplicações são as mais simples, pois elas atuam de forma que não modificam o estado da figura.

Todos os gráficos e superfícies apresentados neste trabalho foram feitos utilizando o programa matemático geogebra, que além de ser um software educacional livre, é prático, podendo ser utilizado por professores e alunos nos diversos níveis do ensino.

Por fim, podemos dizer que trabalhar com isometria no ensino da matemática é fazer o aluno desenvolver sua imaginação criadora, possibilitando desta forma a compreensão e visão de conceitos matemáticos, que o professor possa estar abordando, como: ampliação, redução (escalas), proporção, figuras semelhantes, entre outros.

Gostaríamos de ressaltar que este trabalho, também pode ajudar a aproximar a matemática da realidade de nossos alunos que, por muitas vezes, vêem a matemática de forma fria e sem interligações com as demais ciências e com os problemas reais que surgem diariamente.

Referências Bibliográficas

[1] BARBOSA, J. L. M., *Geometria Hiperbólica*, IMPA, 20º Colóquio Brasileiro de Matemática 24 - 28 julho, 1995, Rio de Janeiro, RJ.

[2] BOYER, C. B., *História da Matemática*, Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo 1993.

[3] BOLDRINI, José Luis. *Álgebra Linear I*, 3^{nd} edição. São Paulo: Harper e Row do Brasil, 1980.

[4] BRASIL, Secretaria da Educação Fundamental. Parâmetros Curricular Nacional. Brasília: MEC./SEF, 1997.

[5] DOMINGUES, Hygino H. et al. *Álgebra Moderna: volume único*, 4^{nd} edição reformulada. São Paulo: Atual, 2003.

[6] EVES, Howard. *Introdução à história da matemática.*, Campinas. São Paulo: Editora da UNICAMP, 2004.

[7] FERREIRA, Susana. *Transformações geométricas e simetrias*, Coimbra, 2000.

[8] GARCIA, A., LEQUAIN, I., *álgebra: um curso de introdução*,impa, Rio de Janeiro 1988.

[9] IEZZI, Gelson. *Fundamentos de Matemática Elementar 1*, 8^{nd} edição. São Paulo: Atual, 2004.

[10] LEDERGERBER-RUOFF, Erika Brigitta. *Isometrias e ornamentos do plano euclidiano*, São Paulo: Atual, 1982.

[11] MELO, Edilson Barbosa de. et al. *Isometrias no plano*,Osasco. São Paulo: Editora da UNIFIEO, 2004.

[12] VALLADARES, Renato José da Costa. *Geometria analítica: a álgebra e a geometria do plano e do espaço*, Rio de Janeiro: LTC Ltda, 1990.

[13] SAMPAIO, J. C. V. *Estruturas Algébricas*, http://www.dm.ufscar.br/ sampaio/algebra.html.

[14] SANTOS, R. J., *Matrizes Vetores e Geometria Analítica*, Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, março 2006.

INSTITUTO
FEDERAL
Maranhão

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-69745-40-2
9 788569 745402